

AL-350

B. A. / B. Sc. (Second Year) Examination, 2018-19

(For Regular Students)

MATHEMATICS

Paper : Second

(Advanced Calculus)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न हल कीजिए। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note : Attempt questions of all three sections. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-'अ'

Section-'A'

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5×1=5

(Objective Type Questions)

नोट : निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 01

अंक का है।

Note : Attempt all the following questions. Each question carries 01 mark.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ का मान है—

(a) $\frac{1}{e}$

(b) e

(c) 1

(d) 0

The value of $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ is :

(a) $\frac{1}{e}$

- (b) e
- (c) 1
- (d) 0

(ii) फलन $f(x) = \frac{1}{x}$ किस अन्तराल में एक समान सतत् है ?

- (a) $(0, 1]$
- (b) $[0, 1]$
- (c) $[0, 1)$
- (d) $(0, 1)$

In which interval the function $f(x) = \frac{1}{x}$ is

uniformly continuous?

- (a) $(0, 1]$
- (b) $[0, 1]$

- (c) $[0, 1)$
- (d) $(0, 1)$

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ का मान है—

- (a) 0
- (b) 1
- (c) -1
- (d) अस्तित्व में नहीं

The value of $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ is :

- (a) 0
- (b) 1
- (c) -1
- (d) Does not exist

(iv) सरल रेखाओं $x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$ का अन्वलोप है—

- (a) परवलय
- (b) वृत्त
- (c) दीर्घवृत्त
- (d) अतिपरवलय

Envelope of the straight lines $x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$ is :

- (a) Parabola
- (b) Circle
- (c) Ellipse
- (d) Hyperbola

(v) $\int_0^1 \int_0^2 (x+y) dx dy$ का मान है—

$\left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^2$

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

The value of $\int_0^1 \int_0^2 (x+y) dx dy$ is :

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×3=15

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 03 अंकों का है।

Note : Attempt all five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 03 marks.

इकाई-I

Unit-I

[7]

2. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम कॉशी अनुक्रम होता है।
 Prove that every convergent sequence is a Cauchy sequence.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ अभिसारी है।

Show that the sequence $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent.

इकाई-II

Unit-II

3. निम्न फलन की सांतत्य का $x = 0$ पर परीक्षण कीजिए।

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x-1} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

AL-350

PTO

[8]

Test the continuity of the following function at $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x-1}}{e^{1/x+1}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

अथवा

Or

फलन $f(x) = x^2$ के लिए अन्तराल $[-1, 1]$ में रोल प्रमेय सत्यापित कीजिए।

Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^2$ in the interval $[-1, 1]$.

इकाई-III

Unit-III

4. यदि $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ तो सिद्ध कीजिए कि

AL-350

[9]

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

If $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$,

then prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x - y}{x^2 + y^2}$$

का अस्तित्व नहीं है।

Prove that

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x - y}{x^2 + y^2}$$

does not exist.

AL-350

PTO

[10]

इकाई-IV

Unit-IV

5. समीकरण $y = mx + \frac{a}{m}$ से निरूपित सरल रेखा के कुल के अन्वालोप

का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(8)

Find the envelope of the family of straight lines

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

अथवा

Or

फलन $u = x^2 + y^3 - 3axy$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मानों की विवेचना कीजिए।

Discuss the maximum or minimum values of the function

$$u = x^2 + y^3 - 3axy.$$

इकाई-V

Unit-V

6. मूल्यांकन कीजिए—

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{y/x} dy dx$$

(2)

AL-350

Evaluate :

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{y/x} dy dx$$

अथवा

Or

$\int_a^b \int_a^x f(x, y) dx dy$ के समाकलन के क्रम को परिवर्तित कीजिए।

Change the order of integration of

$$\int_a^b \int_a^x f(x, y) dx dy$$

खण्ड-'स'

Section-'C'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×4=20

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

Note : Attempt all five questions. Each question carries 4 marks.

7. श्रेणी

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$$

की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the series

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} - \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$$

अथवा

Or

श्रेणी

$$x + \frac{2^2 \cdot x^2}{2} - \frac{3^3 \cdot x^3}{3} \dots; x > 0$$

की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the series

$$x + \frac{2^2 \cdot x^2}{2} + \frac{3^3 \cdot x^3}{3} \dots; x > 0$$

8. सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $x=0$ पर संतत व अवकलनीय है—

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Prove that the following function is continuous and differentiable at $x=0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

अथवा

Or

फलन $f(x) = \sqrt{(x^2-4)}$ के लिए अन्तराल $[2, 4]$ में लैग्रान्ज के मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Lagrange's mean value theorem for the function

$$f(x) = \sqrt{(x^2-4)} \text{ in the interval } [2, 4].$$

9. समीकरण

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + x^2y = 0.$$

8

को रूपान्तरित कीजिए। जबकि $x = \sin \theta$

Transform the equation

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + x^2y = 0$$

when $x = \sin \theta$.

अथवा

Or

फलन $f(x, y) = x^2y + 3y - 2$ का $(x-1)$ और $(y+2)$ की घातों में प्रसार कीजिए।

Expand the function $f(x, y) = x^2y + 3y - 2$ in powers of $(x-1)$ and $(y+2)$.

10. परवलय $y^2 = 4ax$ के केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of evolute of the parabola $y^2 = 4ax$.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए—

$$\sqrt{m} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \sqrt{2m}, m > 0$$

Prove that :

$$\sqrt{m} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \sqrt{2m}, m > 0$$

11. मूल्यांकन कीजिए—

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dx \, dy \, dz$$

Evaluate :

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dx \, dy \, dz.$$

5

अथवा

Or

AL-350

PTO

2,800]

AL-350

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ से परिवद्ध क्षेत्र को रेखा X-अक्ष के परितः

घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of the solid generated by the revolution

of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ about the X-axis.