

**DB-687**

**B. A./B. Sc. (Second Year) Examination, 2021-22**

**(For Private Students)**

**MATHEMATICS**

**Paper : First**

**(Abstract Algebra)**

**Time Allowed : Three hours**

**Maximum Marks : 50**

**नोट :** सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार करें। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

**Note:** Attempt questions of all **three** sections as directed. Distribution of marks is given with sections.

**खण्ड-'अ'**

**Section-'A'**

**( वस्तुनिष्ठ प्रश्न ) 5×1=5**

**(Objective Type Questions)**

**DB-687**

**PTO**

<https://www.mcboonline.com>

**| 2 |**

**नोट :** निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

**Note:** Attempt all the following questions. Each question carries 1 mark.

**1. सही उत्तर चुनिए—**

**Choose correct answer :**

(i) किसी समूह में तत्समक अवयव होते हैं—

(a) 2

(b) 1

(c) 3

(d) अनन्त

**The number of identity element in a group is :**

(a) 2

(b) 1

(c) 3

(d) Infinite

**DB-687**

<https://www.mcboonline.com>

(ii) प्रत्येक समूह  $G$  के प्रसामान्य उपसमूह होते हैं—

- (a)  $e$  और  $G$
- (b) केवल  $e$
- (c) केवल  $G$
- (d) इनमें से कोई नहीं

The normal subgroups of each group  $G$  are :

- (a)  $e$  and  $G$
- (b) Only  $e$
- (c) Only  $G$
- (d) None of these

(iii) कोई समाकारिता आच्छादक हो तो वह अन्तर्क्षेपी भी—

- (a) हो सकती है
- (b) नहीं हो सकती है
- (c) अनिश्चित
- (d) इनमें से कोई नहीं

If any homomorphism is onto, it can be :

- (a) into also
- (b) not into also

- (c) indefinite
- (d) None of these

(iv) यदि  $f : G \rightarrow G$  एक समाकारिता है तब  $f$  एक स्वाकारिता है यदि—

- (a)  $f$  एकैकी आच्छादक है
- (b)  $f$  एकैकी अन्तर्क्षेपी है
- (c)  $f$  बहुएक आच्छादक है
- (d) इनमें से कोई नहीं

Let  $f : G \rightarrow G$  be a homomorphism, then  $f$  is an automorphism, if :

- (a)  $f$  is one-one onto
- (b)  $f$  is an one-one into
- (c)  $f$  is many one onto
- (d) None of these

(v) यदि  $f : R \rightarrow R^1$  एक तुल्याकारिता है तो,

- (a)  $f$  एकैकी आच्छादक है
- (b)  $f$  एकैकी अन्तर्क्षेपी है

- (c)  $f$  एकैकी आच्छादक और समाकारिता है  
 (d) इनमें से कोई नहीं

If  $f: R \rightarrow R'$  is an isomorphism, then :

- (a)  $f$  is one-one onto  
 (b)  $f$  is one-one into  
 (c)  $f$  is one-one onto and homomorphism  
 (d) None of these

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 5×3=15

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

Note: Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 3 marks.

इकाई-I

Unit-I

2. आबेली समूह को परिभाषित कीजिये।

Define Abelian Group.

अथवा

Or

मान लो  $H$  तथा  $K$  समूह  $G$  के कोई दो संकुल हैं तब—

$$(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$$

If  $H$  and  $K$  are two complexes of a group  $G$  then :

$$(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$$

इकाई-II

Unit-II

3. सिद्ध कीजिये कि यदि  $H$  समूह  $G$  का उपसमूह हो और  $h \in H$ , तब—

$$hH = H = Hh$$

If  $H$  is a subgroup of  $G$ , and  $h \in H$  then :

$$hH = H = Hh$$

अथवा

Or

सामान्य उपसमूह परिभाषित कीजिये।

Define Normal Subgroup.

इकाई-III

Unit-III

4. क्रमचय  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  का प्रतिलोम ज्ञात कीजिये।

Find the inverse of the  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  permutations.

अथवा

Or

समाकारिता की अष्टि स्पष्ट कीजिये।

Define kernel of a homomorphism.

इकाई-IV

Unit-IV

5. सिद्ध कीजिये कि  $G$  पर संयुग्मता सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है।

Show that the relation of conjugacy is an equivalence relation of  $G$ .

अथवा

Or

सिद्ध कीजिये कि एक समूह की कोई दो संयुग्मी वर्ग या  $(ca)$  तथा  $(cb)$   $a, b \in G$  के लिये तो असंयुक्त होते हैं या सर्वसम।

Any two conjugate class  $(ca)$  and  $(cb)$  for  $a, b \in G$  are either disjoint or conjugate.

इकाई-V

Unit-V

6. क्रम विनिमेय वलय को परिभाषित कीजिये।

Define Commucative ring.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ उपवलय होता है।

Show that the intersection of two subring is a subring.

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×6=30

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है।

Note: Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 6 marks.

इकाई-I

Unit-I

सिद्ध कीजिये कि परिमित समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित होती है।

Show that the order of any element of a finite group is finite.

अथवा

Or

DB-687

PTO

मान लो  $H, G$  का अरिक्त उपसमुच्चय है तो  $H, G$  का उपसमूह होगा यदि और केवल यदि

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

जहाँ  $b^{-1}$ ,  $G$  में  $b$  का प्रतिलोम है।

Let  $H$  be a non-empty subset of a group  $G$ . Then  $H$  is a subgroup of  $G$  if and only if

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

where  $b^{-1}$  is the inverse of  $b$  in  $G$ .

इकाई-II

Unit-II

सिद्ध कीजिये कि यदि  $H$ , समूह  $G$  का एक उपसमूह है तो सम्बन्ध  $a \equiv b \pmod{H}$  एक तुल्यता सम्बन्ध है।

Show that if  $H$  is a subgroup of  $G$ , then the relation  $a \equiv b \pmod{H}$  is also an equivalence relation.

अथवा

Or

DB-687

लैग्रान्ज प्रमेय लिखिये और सिद्ध कीजिये।

State and prove Lagrange's theorem.

### इकाई-III

#### Unit-III

9. समाकारिता का मूल प्रमेय लिखिये और सिद्ध कीजिये।

State and prove fundamental theorem of homomorphism.

अथवा

Or

$n$  अवयवों के  $|n|$  क्रमचय गुणन के सापेक्ष समूह बनाते हैं।

The  $|n|$  permutations on  $n$  subjects form a group with respect to permutation multiplication.

### इकाई-IV

#### Unit-IV

10. दर्शाइये कि एक चक्रिय समूह की स्वाकारिताओं का समूह आबेली होता है।

Prove that the group of automorphisms of a cyclic group is an abelian.

अथवा

Or

परिमित आबेली समूहों के लिए कौशी का प्रमेय लिखिये और सिद्ध कीजिये।

State and prove Cauchy's theorem for finite abelian group.

### इकाई-V

#### Unit-V

11. सिद्ध कीजिये कि एक क्रमविनिमेयी वलय का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब एक क्रमविनिमेयी वलय होता है।

Prove that every homomorphic image of a commutative ring is a commutative ring.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णाकीय प्रान्त होता है।