

(4)

Show that of the  $n!$  permutation on  $n$ -symbols  $\frac{n!}{2}$  are even and

$\frac{n!}{2}$  are odd.

10. दर्शाइये कि समूह  $G$  के किसी अवयव  $a$  का प्रसामान्यक  $N(a), G$  का एक उपसमूह है।

Show that normalizer  $N(a)$  of a element  $a$  of a group  $G$  is a subgroup of  $G$ .

अथवा / OR

दर्शाइये कि कोटि 6 के सभी आवेली समूह चक्रीय होते हैं।

Show that all abelian group of order 6 are cyclic.

11. वलय  $R$  का अरिक्त उपसमुच्चय  $S, R$  का उपवलय होगा यदि और केवल यदि

A nonempty subset  $S$  of a ring  $R$  is a subring of  $R$  if and only if:

(i)  $a - b \in s, \quad \forall a, b \in s$

(ii)  $ab \in s, \quad \forall a, b \in s$

अथवा / OR

सिद्ध करो कि किसी वलय का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब उसके किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होता है।

Prove that every homomorphic image of a ring is isomorphic to its quotient ring.

Roll No. ....

**OS-215-S**

**B.A./B.Sc. II -Year - Supplementary Exam - 2020-21**

**Subject - Mathematics**

**Paper - I**

**(Abstract Algebra)**

M.M. - 40

नोट : सभी प्रश्न हल कीजिए।

Note : Attempt all questions.

**खण्ड 'अ'(Section-A)**

**वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)**

1. सही उत्तर चुनिये : 1X5=5

Choose the correct answer :

- (i) किसी समूह में तत्समक अवयव होते हैं :

The number of identity elements in a group is:

- (a) 2 (b) 1  
(c) 3 (d) (अनन्त) Infinite

- (ii) प्रत्येक समूह  $G$  के प्रसामान्य उपसमूह होते हैं :

- (a)  $e$  और  $G$  (b) केवल  $e$   
(c) केवल  $G$  (d) इनमें से कोई नहीं

Normal subgroup of every group  $G$  are :

- (a)  $e$  and  $G$  (b) Only  $e$   
(c) only  $G$  (d) none of these

- (iii)  $S_4$  सममित समूह की कोटि है :

The order of the symmetric group  $S_4$  is:

- (a) 6 (b) 12  
(c) 18 (d) 24

- (iv) यदि  $G$  कोटि 4 का चक्रीय समूह है तब  $O(A(G))$  है :

If  $G$  be a cyclic group of order 4 then  $O(A(G))$  is :

- (a) 1 (b) 2  
(c) 3 (d) 4

(2)

(v) निम्न में से कौन सा वलय पूर्णाकीय डोमेन नहीं है :  
Which of the ring is not an integral domain :

- (a)  $(I, +, \cdot)$  (b)  $(Q, +, \cdot)$   
(c)  $(N, +, \cdot)$  (d)  $(R, +, \cdot)$

### खण्ड 'ब' (Section-B)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions) 2X5=10

2. समूहाभ तथा अर्धसमूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिये।  
Define groupoid and semigroup with example.

अथवा / OR

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक चक्रीय समूह आवेली होता है।

Prove that every cyclic group is abelian.

3. किसी समूह के दो, प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ प्रसामान्य उपसमूह होता है सिद्ध करो।

Prove that the intersection of two normal subgroup of a group is a normal subgroup.

अथवा / OR

यदि  $G$  एक परिमित समूह हो और  $a \in G$ , तब सिद्ध करो कि  $a^{o(G)} = e$ .

If  $G$  is a finite group and  $a \in G$ , then prove that  $a^{o(G)} = e$ .

4. समूहों की समाकारिता एवं तुल्याकारिता को परिभाषित कीजिये।  
Define Homomorphism and Isomorphism of groups.

अथवा / OR

क्रमचय  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  का प्रतिलोम ज्ञात कीजिये।

Find the inverse of the permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

5. एक समूह की स्वकारिता को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिये।  
Define Automorphism of a group with example.

अथवा / OR

(3)

यदि  $G$  एक समूह हो तब सिद्ध कीजिये।

If  $G$  is a group then prove that

$$C(e) = \{e\}$$

6. सिद्ध करो कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ उपवलय होता है।  
Prove that the intersection of two subring is a subring.

अथवा / OR

सिद्ध करो कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णाकीय प्रान्त होता है।

Prove that every field is an integral domain.

### खण्ड 'स' (Section-C)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions) 5X5=5

7. चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह चक्रीय होता है। सिद्ध करो।  
Every subgroup of a cyclic group is cyclic prove that.

अथवा / OR

सिद्ध कीजिये कि तीन अवयवों का समूह अनिवार्य आवेली होता है।  
Prove that a group with three elements is necessarily abelian.

8. लैग्रान्ज प्रमेय को लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State and prove Lagrange's theorem.

अथवा / OR

यदि समूह  $G$  के  $H$  और  $K$  परिमित उपसमूह हों तो सिद्ध करो।  
If  $H$  and  $K$  be finite subgroup of a group  $G$  then prove that

$$O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$$

9. समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।  
State and prove Fundamental theorem of Homomorphism.

अथवा / OR

दर्शाइये कि  $n$  प्रतीकों पर  $n!$  क्रमचयों से  $\frac{n!}{2}$  सम होते हैं और  $\frac{n!}{2}$  विषम होते हैं।