

DB-688

B. A./B. Sc. (Second Year) Examination, 2021-22

(For Private Students)

MATHEMATICS

Paper : Second

(Advance Calculus)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार करें। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note: Attempt questions of all three sections as directed. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-‘अ’

Section-‘A’

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5×1=5

(Objective Type Questions)

DB-688

<https://www.mcbonline.com>

PTO

नोट : इस खण्ड से सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Note: Attempt all questions from this section. Each question carries 1 mark.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose correct answer :

(i) श्रेणी $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ है—

- (a) अपसारी
- (b) दोलनी
- (c) अभिसारी
- (d) इनमें से कोई नहीं

The series $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ is :

- (a) Convergent
- (b) Oscillate

DB-688

<https://www.mcbonline.com>

- (c) Divergent
(d) None of these

(ii) फलन $f(x) = \frac{1}{x}$ किस अन्तराल में एकसमान संतत

हैं—

- (a) $[0, 1]$
(b) $(0, 1]$
(c) $[0, 1)$
(d) इनमें से कोई नहीं

The function $f(x) = \frac{1}{x}$ is uniformly continuous

on :

- (a) $[0, 1]$
(b) $(0, 1]$
(c) $[0, 1)$
(d) None of these

(iii) यदि $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ तब—

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} =$$

- (a) 0
(b) 1
(c) $\sin \theta$
(d) $\cos \theta$

If $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ then value of

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} =$$

- (a) 0
(b) 1
(c) $\sin \theta$
(d) $\cos \theta$

(iv) $\sqrt{n! - n}$ का मान है, जब $n = \frac{1}{4}$

- (a) π
(b) 2π

- (c) 3π
 (d) $\sqrt{2}\pi$

The value of $\sqrt{n}\sqrt{1-n}$ when $n = \frac{1}{4}$ is :

- (a) π
 (b) 2π
 (c) 3π
 (d) $\sqrt{2}\pi$
- (v) परवलय $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को दीर्घ अक्ष के परितः घुमाने

से जनित ठोस का आयतन है—

- (a) $\pi a^2 b$
 (b) πab^2
 (c) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$
 (d) $\frac{4}{3}\pi ab^2$

The volume of the solid generated by the revolution of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ about the major axis

is:

- (a) $\pi a^2 b$
 (b) πab^2
 (c) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$
 (d) $\frac{4}{3}\pi ab^2$

खण्ड-‘ब’

Section-‘B’

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×3=15

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

Note: Attempt all questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 3 marks.

इकाई-I

Unit-I

2. अनुक्रम $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ की सीमा का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ

$$s_n = \sum_1^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n}$$

Evaluate limit of the sequence $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ where

$$s_n = \sum_1^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n}$$

अथवा

Or

दर्शाइये कि श्रेणी $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ निरपेक्षतः

अभिसारी है।

Test the absolute convergence of the series

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

इकाई-II

Unit-II

3. दर्शाइये कि फलन $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \infty)$ अन्तराल $(0, \infty)$ पर एकसमान संतत है।

Show that function $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \infty)$ is uniformly continuous on $(0, \infty)$.

अथवा

Or

क्या रोले प्रमेय फलन $f(x) = 1 - (x-3)^{2/3}$ के लिए लागू होती है।

Does Rolle's theorem apply to the function

$$f(x) = 1 - (x-3)^{2/3}$$

4. दर्शाइये कि फलन $f(x, y) = x - y$ सभी $(x, y) \in R^2$ के लिए सतत है

Show that the function $f(x, y) = x - y$ is continuous for all $(x, y) \in R^2$.

अथवा

Or

यदि $x^y + y^x = c$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $x^y + y^x = c$ then find the value of $\frac{dy}{dx}$.

5. समीकरण $y = mx + \frac{a}{m}$ से निरूपित वक्र कुल के अन्वालोप

का समीकरण ज्ञात कीजिए। जहाँ m वक्र कुल का प्राचल है।

Find the equation of the envelope of the family of straight

lines given by $y = mx + \frac{a}{m}$, where m being the parameter of the family.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए—

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

Prove that :

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

6. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को X अक्ष के परितः घुमाने से जनित

ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of the solid generated by revolving the

ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ about the X axis.

अथवा

Or

$\iint xy \, dx \, dy$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ समाकलन क्षेत्र प्रथम

चतुर्थांश में जिसके लिए $x + y \leq 1$ है।

Evaluate $\iint xy \, dx \, dy$ over the region in the first quadrant

for which $x + y \leq 1$.

खण्ड-'स'

Section-'C'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×6=30

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है।

Note: Attempt all questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 6 marks.

इकाई-I

Unit-I

7. सिद्ध कीजिए प्रत्येक अभिसारी वास्तविक अनुक्रम, कौंशी अनुक्रम होता है।

Prove that every convergent real sequence is Cauchy sequence.

अथवा

Or

उस श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए जिसका n वाँ पद

$$(\sqrt{n^2+1}-n)x^{2n} \text{ है।}$$

Test the convergence of the series whose n th term is

$$(\sqrt{n^2+1}-n)x^{2n}.$$

इकाई-II

Unit-II

8. यदि फलन $f(x)$ एवं $g(x)$ बिन्दु $x=a$ पर सतत है तो फलन $f(x)/g(x)$ भी $x=a$ पर सतत है जबकि $g(a) \neq 0$ सिद्ध कीजिए।

Prove that if the function $f(x)$ and $g(x)$ are continuous at the point $x=a$ then the function $f(x)/g(x)$ is also continuous at $x=a$ where $g(a) \neq 0$.

अथवा

Or

फलनों $f(x) = x^2 + 1$ तथा $\phi(x) = 2x^3$ के लिये संवृत अन्तराल $[1, 2]$ में कॉशी के मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Cauchy's mean value theorem for the function $f(x) = x^2 + 1$ and $\phi(x) = 2x^3$ in the closed interval $[1, 2]$.

इकाई-III

Unit-III

9. समीकरण $x^2 \frac{d^2y}{dz^2} + x \frac{dy}{dz} + y = 0$ में स्वतंत्र चर x को z से

परिवर्तित कीजिए जबकि $x = 1/z$.

Change the independent variable from x to z in the equation

$$x^2 \frac{d^2y}{dz^2} + x \frac{dy}{dz} + y = 0$$

where $x = 1/z$.

अथवा

Or

दो चरों के फलनों के लिये मध्यमान प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove mean value theorem for functions of two variables.

इकाई-IV

Unit-IV

10. परवलय $y^2 = 4ax$ के केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the evolute of the parabola $y^2 = 4ax$.

अथवा

Or

फलन $x^3y^2(1-x-y)$ के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान प्राप्त कीजिए।

Find the maximum or minimum values of the function

$$x^3y^2(1-x-y).$$

इकाई-V

Unit-V

11. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dx \, dy \, dz$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dx \, dy \, dz$$

अथवा

Or

$\iint_R e^{2x+3y} \, dx \, dy$ का मान $x=0, y=0$ तथा $x+y=1$ से

परिबद्ध त्रिभुज के ऊपर ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\iint_R e^{2x+3y} \, dx \, dy$ over the triangle bounded by

$$x=0, y=0 \text{ and } x+y=1.$$