

RS-523

B. A./B. Sc. (Third Year) Examination, 2020-21

MATHEMATICS

Paper : First

(Linear Algebra and Numerical Analysis)

Maximum Marks : 40

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार हल कीजिये। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note: Attempt questions of all three sections as directed. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-अ

Section-A

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5×1=5

(Objective Type Questions)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Note: Attempt all the questions. Each question carries 1 mark.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) रैखिकत: स्वतन्त्र समुच्चय का कोई उपसमुच्चय—

(a) रैखिकत: स्वतन्त्र होता है।

(b) रैखिकत: परतन्त्र होता है।

(c) रैखिकत: स्वतन्त्र एवं परतन्त्र दोनों होता है।

(d) इनमें से कोई नहीं

Any subset of linearly independent set is :

(a) Linearly independent

(b) Linearly dependent

- (c) Linearly independent and dependent both
- (d) None of these

(ii) रैखिक प्रतिचित्रण $f : U \rightarrow V$ की अष्टि—

- (a) U का उपसमुच्चय है।
- (b) U का उपसमूह है।
- (c) U का उपक्षेत्र है।
- (d) U का उपसमष्टि है।

The kernel of the linear mapping $f : U \rightarrow V$ is :

- (a) Subset of U
- (b) Subgroup of U
- (c) Subfield of U
- (d) Subspace of U

(iii) एक आन्तर गुणन समष्टि V में कोई भी शून्येतर लाम्बिक सदिशों का समुच्चय होता है—

- (a) रैखिकतः स्वतन्त्र
- (b) रैखिकतः परतन्त्र
- (c) V का आधार
- (d) इनमें से कोई नहीं

In an inner product space V , any orthogonal set of non-zero vector is :

- (a) Linearly independent
- (b) Linearly dependent
- (c) Basis of V
- (d) None of these

(iv) न्यूटन रैफसन विधि में अभिसरण क्रम है—

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 0
- (d) इनमें से कोई नहीं

The order of convergence of Newton Raphson method is :

- (a) 2
 - (b) 3
 - (c) 0
 - (d) None of these
- (v) गॉस विलोपन विधि है—
- (a) प्रत्यक्ष विधि
 - (b) अप्रत्यक्ष विधि
 - (c) त्रिचरण विधि
 - (d) इनमें से कोई नहीं

Gauss Elimination Method is :

- (a) Directed method
- (b) Indirect method
- (c) Three way method
- (d) None of these

खण्ड-ब

Section-B

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×2=10

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।
Note: Attempt all five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 2 marks.

इकाई-I

Unit-I

2. सदिश समष्टि की परिभाषा उदाहरण सहित समझाइए।

Explain definition and examples of vector spaces.

अथवा

Or

K के किस मान के लिए सदिश $(1, K, 5) \in V_3(R)$ सदिशों $(1, -3, 2)$ और $(2, -1, 1)$ का एक घात संचय है।

For what value of K , The vector $(1, K, 5) \in V_3(R)$ is linear combination of the vector $(1, -3, 2)$ and $(2, -1, 1)$.

इकाई-II

Unit-II

3. रैखिक रूपान्तरण का परिसर समझाइए।

Explain Range of a Linear Transformation.

अथवा

Or

दिखाइए कि $f : V_2(R) \rightarrow V_2(R)$ जो $f(x, y) = (x^3, y^3)$ से परिभाषित है रैखिक रूपान्तरण नहीं है।

Show that $f : V_2(R) \rightarrow V_2(R)$ defined as

$f(x, y) = (x^3, y^3)$ is not linear.

इकाई-III

Unit-III

4. लाम्बिक सदिश को समझाइये।

Explain Orthogonal Vectors.

अथवा

Or

दर्शाइए कि प्रत्येक आन्तर गुणन समष्टि एक मानकित सदिश समष्टि होती है।

Show that every inner product space is normed vector space.

इकाई-IV

Unit-IV

5. सम द्विभाजन विधि को समझाइए।

Explain Bisection Method.

अथवा

Or

दर्शाइए कि कोटे संख्याओं का कुल योग इकाई होता है।

Show that the sum of Cote's number is unity.

इकाई-V

Unit-V

6. चोलेस्की वियोजन विधि को समझाइए।

Explain Cholesky Decomposition method.

अथवा

Or

समीकरण निकाय को गॉस विलोपन विधि से हल कीजिए—

$$2x - y + 3z = 9$$

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

Solve the system of equation by Gauss Elimination method :

$$2x - y + 3z = 9$$

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

खण्ड-स

Section-C

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×5=25

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note: Attempt all five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 5 marks.

इकाई-I

Unit-I

7. सिद्ध कीजिए सदिश समष्टि $V(F)$ का एक उपसमुच्चय w सदिश समष्टि $V(F)$ का उपसमष्टि होगा यदि और केवल यदि $a, b \in f$ और $\alpha, \beta \in w \Rightarrow a\alpha + b\beta \in w$

A subset w of a vector space $V(F)$ is a subspace $V(F)$ iff $a, b \in f$ and $\alpha, \beta \in w \Rightarrow a\alpha + b\beta \in w$.

अथवा

Or

विस्तार प्रमेय का कथन कीजिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Extension Theorem.

इकाई-II

Unit-II

8. जाति शून्यता प्रमेय का कथन कीजिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the Rank Nullity Theorem.

अथवा

Or

दर्शाइए कि आव्यूह A विकर्णनीय है जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix A is diagonalizable where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

इकाई-III

Unit-III

9. आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ में सिद्ध कीजिए कि—

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$$

In an inner product vector space $V(F)$, prove that :

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित विमीय आन्तर गुणन समष्टि का एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार होता है।

Prove that every finite dimensional inner product space has an orthonormal basis.

इकाई-IV

Unit-IV

10. न्यूटन के विभाजित अंतर सूत्र का उपयोग कर $f(2)$, $f(8)$ और $f(15)$ का मान निम्न सारणी से ज्ञात कीजिए—

| | | | | | | | |
|--------|---|----|-----|-----|-----|------|------|
| x | : | 4 | 5 | 7 | 10 | 11 | 13 |
| $f(x)$ | : | 48 | 100 | 294 | 900 | 1210 | 2028 |

Using Newton's divided difference formula find the values of $f(2)$, $f(8)$ and $f(15)$ given the following table :

| | | | | | | | |
|--------|---|----|-----|-----|-----|------|------|
| x | : | 4 | 5 | 7 | 10 | 11 | 13 |
| $f(x)$ | : | 48 | 100 | 294 | 900 | 1210 | 2028 |

अथवा

Or

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए—

(i) समलम्बी नियम से

(ii) सिम्पसन के 1/3 नियम से

जबकि अन्तरालों को 6 सम भागों में विभाजित किया गया है।

Evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ by using :

(i) Trapezoidal rule

(ii) Simpson's 1/3 rule

where the interval of integration is subdivided into 6 equal parts.

इकाई-V

Unit-V

11. निम्न समीकरण निकाय को LU वियोजन विधि से हल कीजिए—

$$3x + 2y + 7z = 4$$

$$2x + 3y + z = 5$$

$$3x + 4y + z = 7$$

Solve the following system of equation by LU decompo-sition method :

$$3x + 2y + 7z = 4$$

$$2x + 3y + z = 5$$

$$3x + 4y + z = 7$$

अथवा

Or

रुंग कुट्टा विधि का प्रयोग कर $x = 0.5$, $x = 2.0$ के लिए $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$ हल कीजिए, जहाँ $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.5$

Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$ for $x = 0.5$, $x = 2.0$ by using Runge Kutta method where $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.5$.