

## SM-359

**B. A. / B. Sc. (Third Year) Examination, 2023**

**(For Regular/Private/Suppl./Ex./Fail Students)**

### MATHEMATICS

*Paper : Second*

**(Real and Complex Analysis)**

*Time Allowed : Three hours*

*Maximum Marks : 40 Reg./50 Pvt.*

**नोट :** सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार हल कीजिए।  
अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

**Note:** Attempt questions of all **three** sections as directed. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-‘अ’

Section-‘A’

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न) 5×1=5 (Reg.)

(Objective Type Questions) 5×1=5 (Pvt.)

SM-359

PTO

[ 2 ]

**नोट :** सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न समान अंकों का है।

**Note :** Attempt all questions. Each question carries equal marks.

1. सही विकल्प का चयन कीजिए—

Choose the correct option :

(i) यदि  $f(x) = c, \forall x \in [a, b]$ , तब  $\int_a^b f(x)$  का मान है—

(a)  $c$

(b)  $0$

(c)  $c(b - a)$

(d)  $c(a - b)$

If  $f(x) = c, \forall x \in [a, b]$ , then the value of

$\int_a^b f(x)$  will be :

(a)  $c$

(b)  $0$

SM-359

(c)  $c(b - a)$ (d)  $c(a - b)$ (ii) समाकल  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$  है—

(a) अभिसारी

(b) अपसारी

(c) दोलनी

(d) कोई नहीं

The integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$  is

(a) Convergent

(b) Divergent

(c) Oscillatory

(d) None

(iii) दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम होता है—

(a) परिबद्ध

(b) अपरिबद्ध

(c) एकदिष्ट ह्रासमान

(d) एकदिष्ट वर्धमान

In a metric space each convergent sequence is :

(a) Bounded

(b) Unbounded

(c) Monotonic decreasing

(d) Monotonic increasing

(iv) प्रत्येक एक समान संतत फलन होता है—

(a) संतत

(b) असंतत

(c) परिबद्ध

(d) कोई नहीं

Every uniformly continuous function is :

(a) Continuous

(b) Discontinuous

(c) Bounded

(d) None

(v) फलन  $e^z$  की पृथक अनिवार्य विच्छेदनात्मक निम्न पर है—

- (a)  $z = 0$   
 (b)  $z = 1$   
 (c)  $z = \infty$   
 (d) कहीं नहीं

The function  $e^z$  has an isolated essential singularity at the following :

- (a)  $z = 0$   
 (b)  $z = 1$   
 (c)  $z = \infty$   
 (d) No where

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)  $5 \times 2 = 10$  (Reg.)

(Short Answer Type Questions)  $5 \times 3 = 15$  (Pvt)

**नोट :** सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न समान अंकों का है।

**Note:** Attempt all following questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries equal marks.

इकाई-I

Unit-I

2. उपरि एवं निम्न रीमान समाकल को परिभाषित कीजिये।  
 Define upper and lower Riemann integral.

अथवा

Or

यदि  $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$  तब  $f_x(1, 2)$  और  $f_y(1, 2)$  का मान ज्ञात कीजिये।

If  $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$  then find  $f_x(1, 2)$  and  $f_y(1, 2)$ .

इकाई-II

Unit-II

3. समाकल  $\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ ,  $a > 1$  की अभिसारिता का परीक्षण कीजिये।

Test the convergence of the integral

5.

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad a > 1$$

[ 7 ]

अथवा

Or

फोरियर श्रेणी को परिभाषित कीजिये।

Define the Fourier Series.

इकाई-III

Unit-III

दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिये।

Define Metric Space.

अथवा

Or

सीमा बिन्दु एवं व्युत्पन्न समुच्चय को परिभाषित कीजिये।

Define Limit Point and derived set

इकाई-IV

Unit-IV

5. दर्शाइए कि फलन,  $f(z) = \bar{z}$ ,  $z = 0$  पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं।

Show that the function  $f(z) = \bar{z}$  is continuous but not differentiable at  $z = 0$ .

SM-359

<https://www.mcbonline.com>

PTO

[ 8 ]

अथवा

Or

वैश्लेषिक फलन के लिए कौशी-रीमान समीकरण लिखिये।

Write the Cauchy-Riemann equations for analytic functions.

इकाई-V

Unit-V

6. टेलर प्रमेय का कथन लिखिये।

Write the statement of Taylor's theorem.

अथवा

Or

विलक्षण बिन्दु को परिभाषित कीजिये एवं विलक्षणताओं के प्रकार के नाम लिखिये।

Define singular point and write the name of types of singularities.

SM-359

<https://www.mcbonline.com>

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)  $5 \times 5 = 25$  (Reg.)(Long Answer Type Questions)  $5 \times 6 = 30$  (Pvt)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई में एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न समान अंकों का है।

Note : Attempt all following questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries equal marks.

## इकाई-I

## Unit-I

7. यदि  $f \in R[a, b]$  तब सिद्ध कीजिये  $|f| \in R[a, b]$  तथा

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

If  $f \in R[a, b]$  then prove that  $|f| \in R[a, b]$  and

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

समाकलन गणित के मूलभूत प्रमेय को लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State and prove fundamental theorem of Integral Calculus.

## इकाई-II

## Unit-II

8.  $\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x^2} dx$  जहाँ  $a > 0$  के अभिसरण का परीक्षण कीजिये।

Test the convergence of  $\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x^2} dx$  where  $a > 0$ .

अथवा

Or

फलन  $f(x) = x \sin x$  के लिए अन्तराल  $(-\pi, \pi)$  में फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिये। अतः ज्ञात कीजिये—

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \dots$$

Obtain Fourier series of the function  $f(x) = x \sin x$  in the interval  $(-\pi, \pi)$ . Hence deduce that

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \dots$$

## इकाई-III

## Unit-III

9. सिद्ध कीजिये कि दूरीक समष्टि  $(R, d)$  पूर्ण दूरीक है जहाँ

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in R$$

Prove that the metric space  $(R, d)$  is complete where

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in R.$$

अथवा

Or

दर्शाइए कि  $\sqrt{8}$  परिमेय संख्या नहीं है।

Show that  $\sqrt{8}$  is not a rational number

## इकाई-IV

## Unit-IV

10. कौशी के समाकल सूत्र को लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।  
State and prove Cauchy's integral formula.

अथवा

Or

एक वैश्लेषिक फलन  $f(z) = u + iv$  ज्ञात कीजिये, जिसका वास्तविक भाग  $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$  है।

Find the analytic function  $f(z) = u + iv$  of which the real part is  $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ .

## इकाई-V

## Unit-V

11. कौशी के अवशेष प्रमेय को लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।  
State and prove Cauchy's Residue theorem.

अथवा

Or

$\log(1+z)$  को  $z=0$  के लगभग टेलर श्रेणी द्वारा विस्तारित कीजिये।

Explain  $\log(1+z)$  in a Taylor's series about  $z=0$ .