

NS-489

B. Sc. (Second Year) Examination, 2023

(For Regular/Private/Suppl./Fail/Ex. Students)

MATHEMATICS

Paper : (S2-MATH2T)

(Major-II / Minor / Elective)

(Advanced Calculus and Partial Differential Equations)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 70

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार हल कीजिये।
अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note : Attempt questions of all three sections as directed. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-‘अ’

Section-‘A’

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5×1=5

(Objective Type Questions)

नोट : निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

NS-489

PTO

Note : Attempt all the following questions. Each question carries 1 mark.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) निम्न में से कौन-सा पूर्ण क्रमित क्षेत्र है—

(a) R

(b) Q

(c) R-Q

(d) इनमें से कोई नहीं

Which one of the following is complete ordered field :

(a) R

(b) Q

(c) R-Q

(d) None of these

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ का मान है—(a) x^x

NS-489

- (b) e^{-x}
 (c) e^x
 (d) xe^{-x}

Value of $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ of :

- (a) x^x
 (b) e^{-x}
 (c) e^x
 (d) xe^{-x}

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + 2y)$ का मान होगा—

- (a) 1
 (b) 2
 (c) 4
 (d) 5

The value of $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + 2y)$ is

- (a) 1

- (b) 2
 (c) 4
 (d) 5

(iv) यदि $P, Q, R : x, y, z$ के फलन है तब लैंग्राज अवकल समीकरण का प्रामाणिक रूप है—

- (a) $Pp + Qq = R$
 (b) $Pq + Qp = R$
 (c) $Pq - Qp = R$
 (d) $Pp - Qq = R$

If P, Q, R are the functions of x, y, z then the standard form of langrange differential equation is :

- (a) $Pp + Qq = R$
 (b) $Pq + Qp = R$
 (c) $Pq - Qp = R$
 (d) $Pp - Qq = R$

(v) अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ का हल है—

- (a) $z = o_1(y+x) + o_2(y-x)$

[5]

(b) $z = \phi_1(x) + x \phi_2(y)$

(c) $z = x \phi_1(x+y) + \phi_3(x-y)$

(d) इनमें से कोई नहीं

Solution of differential equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

is :

(a) $z = \phi_1(y+x) + \phi_2(y-x)$

(b) $z = \phi_1(x) + x \phi_2(y)$

(c) $z = x \phi_1(x+y) + \phi_3(x-y)$

(d) None of these

[6]

खण्ड-‘ब’

Section-‘B’

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×5=25

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note : Attempt all five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 5 marks.

इकाई-I

Unit-I

2. सिद्ध कीजिये कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य कम से कम एक परिमेय संख्या होती है।

Prove that there is at least one rational number between any two distinct real numbers.

अथवा

Or

माना कि A वास्तविक संख्याओं का एक अरिक्त उपसमुच्चय है जो निम्न परिबद्ध है तब सिद्ध कीजिये कि

NS-489

NS-489

<https://www.mcbonline.com>

PTO

<https://www.mcbonline.com>

$$\inf A = \sup(-A)$$

Let A be a non empty set of real numbers which is bounded below prove that

$$\inf A = \sup(-A)$$

इकाई-II

Unit-II

3. सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं का अभिसारी अनुक्रम कौशी अनुक्रम होता है।

Prove that every convergent real sequence is a Cauchy sequence.

अथवा

Or

दिखाइये कि $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ अभिसारी अनुक्रम होगा।

Show that the sequence $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ is convergent.

इकाई-III

Unit-III

4. सिद्ध कीजिये कि फलन $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ की सीमा का $(0, 0)$ पर अस्तित्व नहीं है।

Show that the limit of the function $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ at $(0, 0)$ does not exist.

अथवा

Or

यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{(x+y+z)}$$

If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then prove that

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{(x+y+z)}$$

इकाई-IV

Unit-IV

5. स्वेच्छ फलन f को विलोपित कर आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त कीजिये।

[9]

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Obtain the partial differential equation by eliminating the arbitrary function f :

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

अथवा

Or

अंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिये

$$yzp + zxq = xy$$

Solve the partial differential equation

$$yzp + zxq = xy$$

इकाई-V

Unit-V

हल कीजिये

$$r = 6x$$

Solve the equation

$$r = 6x$$

अथवा

Or

NS-489

[10]

हल कीजिये

$$(D^2 + DD' + D' - 1)z = 0$$

Solve

$$(D^2 + DD' + D' - 1)z = 0$$

खण्ड-'स'

Section-'C'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

4×10=40

(Long Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Note : Attempt any four questions. Each question carries 10 marks.

7. सिद्ध कीजिये कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q , पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं होता है।

Prove that the set of rational number Q is not order complete field.

PTO

NS-489

8. निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिये

$$1 + \frac{2x}{2} + \frac{3^2 x^2}{3} + \frac{4^3 x^3}{4} + \dots, x > 0$$

To test the convergency of the following series

$$1 + \frac{2x}{2} + \frac{3^2 x^2}{3} + \frac{4^3 x^3}{4} + \dots, x > 0$$

9. सिद्ध कीजिये कि

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = B(m, n)$$

Prove that

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = B(m, n)$$

10. चार्पिट विधि से हल कीजिये

$$(p^2 + q^2)y = qz$$

Solve by Charpit's method

$$(p^2 + q^2)y = qz$$

11. हल कीजिये

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$$

Solve

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$$

12. फलन $u = x^3 y^2 (1 - x - y)$ के उच्चिष्ठ एवं निम्नष्ठ मान ज्ञात कीजिये।

Find the maxima and minima of the function

$$u = x^3 y^2 (1 - x - y)$$

13. समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ का वर्गीकरण कीजिए तथा विहित रूप में रूपान्तरित कीजिये।

Classify and reduce the equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ to canonical form and solve it.